

TEXTO PARA DISCUSSÃO N° 1073

**FRONTEIRA DE PRODUÇÃO
ESTOCÁSTICA: UMA ABORDAGEM
BAYESIANA**

Thaís C. O. da Fonseca

Rio de Janeiro, fevereiro de 2005

TEXTO PARA DISCUSSÃO N° 1073

FRONTEIRA DE PRODUÇÃO ESTOCÁSTICA: UMA ABORDAGEM BAYESIANA

Thaís C. O. da Fonseca*

Rio de Janeiro, fevereiro de 2005

*Da Universidade Federal Fluminense (UFF)
thais@dme.ufrj.br

Governo Federal

Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão

Ministro – Nelson Machado (interino)

Secretário-Executivo – Nelson Machado



Fundação pública vinculada ao Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão, o IPEA fornece suporte técnico e institucional às ações governamentais, possibilitando a formulação de inúmeras políticas públicas e programas de desenvolvimento brasileiro, e disponibiliza, para a sociedade, pesquisas e estudos realizados por seus técnicos.

Presidente

Glauco Arbix

Diretora de Estudos Sociais

Anna Maria T. Medeiros Peliano

Diretor de Administração e Finanças

Celso dos Santos Fonseca

Diretor de Cooperação e Desenvolvimento

Luiz Henrique Proença Soares

Diretor de Estudos Regionais e Urbanos

Marcelo Piancastelli de Siqueira

Diretor de Estudos Setoriais

Mario Sergio Salerno

Diretor de Estudos Macroeconômicos

Paulo Mansur Levy

Chefe de Gabinete

Persio Marco Antonio Davison

Assessor-Chefe de Comunicação

Murilo Lôbo

URL: <http://www.ipea.gov.br>

Ouvidoria: <http://www.ipea.gov.br/ouvidoria>

ISSN 1415-4765

JEL C1, C13, C29

TEXTO PARA DISCUSSÃO

Uma publicação que tem o objetivo de divulgar resultados de estudos desenvolvidos, direta ou indiretamente, pelo IPEA e trabalhos que, por sua relevância, levam informações para profissionais especializados e estabelecem um espaço para sugestões.

As opiniões emitidas nesta publicação são de exclusiva e inteira responsabilidade dos autores, não exprimindo, necessariamente, o ponto de vista do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada ou do Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão.

É permitida a reprodução deste texto e dos dados contidos, desde que citada a fonte. Reproduções para fins comerciais são proibidas.

SUMÁRIO

SINOPSE

ABSTRACT

1 INTRODUÇÃO 1

2 MODELO 2

3 ESTIMAÇÃO 3

4 IMPLEMENTAÇÃO 5

5 DADO DE PAINEL 7

6 ESTUDO SIMULADO 8

APÊNDICE 11

BIBLIOGRAFIA 11

SINOPSE

O modelo de fronteira de produção estocástica, na especificação clássica, obtém estimativas de máxima verossimilhança (EMV) (pontuais) dos parâmetros e da produtividade dos agentes. A especificação bayesiana proposta, estimada utilizando o algoritmo de Cadeias de Markov de Monte Carlo (MCMC), obtém uma amostra da distribuição do estimador dos parâmetros e da produtividade dos agentes, o que permite derivar outras estatísticas relativas a essas medidas, em particular o valor esperado e o intervalo de máxima densidade. Neste texto, apresenta-se a implementação desse modelo, e mostra-se, empiricamente, que a EMV tem um viés maior do que a estimativa bayesiana, em particular dos momentos de segunda ordem.

ABSTRACT

The model of stochastic production frontier on the classical specification gets maximum likelihood estimates of model parameters e agents productivity. The proposed Bayesian specification, estimated using Monte Carlo Markov Chain (MCMC) gets a sample from the distribution of the parameter and productivity estimator, which make possible measure the expected value and the interval of maximum density. In this paper is showed the implementation of this model, and is showed, empirically, that the maximum likelihood estimator has a bias greater than the Bayesian version, in particular for the second moments.

1 INTRODUÇÃO

O modelo da fronteira de produção está ligado à necessidade de analisar as firmas com relação à eficiência na produção. Existem dois métodos utilizados para medir eficiência: paramétricos e não-paramétricos. Os métodos paramétricos supõem uma forma funcional para a produção e usam os dados para estimar os parâmetros dessa função. Essa função estimada é utilizada para obtenção das eficiências das unidades. Os métodos não-paramétricos, conhecidos como Data Envelopment Analysis (DEA), envolvem o uso de programação linear para a construção de superfícies que permitam a estimação das eficiências de interesse. A principal vantagem do método não-paramétrico é o fato de não ser necessária a imposição de uma forma funcional para a eficiência; porém a fronteira estimada será muito sensível a *outliers*. O método econométrico é capaz de capturar *outliers*, porém é restritivo no sentido de que impõe uma forma funcional para a tecnologia.

O modelo de fronteira estocástica foi proposto simultaneamente por três grupos de pesquisadores: Aigner, Lovell e Schmidt (1977), Meeusen e Van den Broeck (1977) e Battese e Corra (1977). O modelo original é dado por:

$$y = x\beta + e$$

onde:

$$e = v - u \tag{1}$$

A componente v é responsável por capturar o erro de medida, sendo, portanto, simétrica. O componente u é não-negativo e responsável pela ineficiência técnica das unidades operacionais. Essa abordagem consistiu em uma tentativa de superar as limitações das fronteiras determinísticas que não permitiam a presença de um erro aleatório (fora do controle das firmas), considerando todo resíduo como sendo ineficiência técnica. O modelo original de Aigner, Lovell e Schmidt (1977) propõe as seguintes distribuições para as componentes do erro:

$$v \sim N(0, \sigma^2) \text{ e } u \sim N^0(0, \tau^2) \tag{2}$$

Desde então várias propostas tentam generalizar a distribuição de u , que está diretamente ligada às eficiências técnicas. Stevenson (1980) propôs o deslocamento da distribuição normal truncada, permitindo assim uma moda não-nula. Neste modelo,

$$u \sim N^0(\eta, \tau^2) \tag{3}$$

Battese e Coelli (1995) propõem um modelo similar ao anterior para dados de painel, onde:

$$\eta = Z\delta \tag{4}$$

Greene (1990) propõe a utilização do modelo Gama para u em substituição à distribuição normal truncada, porém esse modelo traz alguns problemas de identificação [ver Ritter e Simar (1997)]. Sob o enfoque bayesiano temos o trabalho de Van den Broeck *et alii* (1994) que modelou a componente da ineficiência como uma gama com parâmetro de forma conhecido. Medrano (2003) propõe a utilização da distribuição log-normal para descrever as ineficiências. Neste trabalho, utilizamos o modelo proposto por Battese e Coelli (1995), isto é, o modelo normal para o erro de medida e a distribuição normal truncada para as ineficiências, porém, utilizaremos um enfoque bayesiano.

Em geral, quando se utiliza o enfoque bayesiano, a inferência sobre as eficiências é feita considerando essa componente como sendo uma variável latente que é gerada a cada iteração do algoritmo de estimação. Aqui, a inferência é feita, condicional aos valores gerados ou estimada dos parâmetros. Encontra-se a distribuição das eficiências, dados todos os parâmetros.

2 MODELO

Considere y um vetor de n observações e X uma matriz n por $p + 1$ de co-variáveis.

$$v \sim N(0, \sigma^2)$$

onde:

$$e = v + \lambda u \tag{5}$$

Em que λ é uma constante que, igual a 1, indica função de custo e igual $a - 1$, indica função de produção. O termo de erro e é composto por duas componentes independentes v e u com distribuição:

$$v \sim N(0, \sigma^2), \quad u \sim N^0(\eta, \tau^2)$$

onde:

$$\eta = Z\delta \tag{6}$$

A densidade de e é dada por:

$$g(e) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e - \lambda u)h(u)du \tag{7}$$

Após alguns cálculos obtemos a seguinte densidade:

$$g(e) = \frac{\Phi^{-1}\left(\frac{\eta}{\tau}\right)}{\sqrt{\sigma^2 + \lambda^2 \tau^2}} \phi\left(\frac{e - \lambda \eta}{\sqrt{\sigma^2 + \lambda^2 \tau^2}}\right) \Phi\left(\frac{\lambda \tau (e - \lambda \eta)}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + \lambda^2 \tau^2}} + \frac{\eta \sqrt{\sigma^2 + \lambda^2 \tau^2}}{\sigma \tau}\right) \quad (8)$$

onde ϕ é a função de densidade da Normal-padrão e Φ é a função de distribuição acumulada da Normal-padrão. Podemos escrever:

$$w = \frac{e - \lambda \eta}{\sqrt{\sigma^2 + \lambda^2 \tau^2}}, \quad \lambda^* = \lambda \frac{\tau}{\sigma}, \quad \eta^* = \eta \frac{\sqrt{\sigma^2 + \lambda^2 \tau^2}}{\sigma \tau}$$

Logo,

$$g(w) = \Phi^{-1}\left(\frac{\eta}{\sqrt{1 + \lambda^2 \tau^2}}\right) \phi(w) \Phi(\lambda^* w + \eta^*) \quad (9)$$

que é uma generalização para a distribuição *skew-normal* descrita em Azzalini (1985).

3 ESTIMAÇÃO

3.1 FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA

Considere um conjunto de dados *cross-section*, com n firmas independentes. Assuma o modelo:

$$y_i = X_i \beta + e_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (10)$$

onde e_i tem distribuição *closed skew-normal* com densidade dada na equação (8). O vetor de parâmetros é $\psi = (\beta, \sigma^2, \delta, \tau^2)$. A função de verossimilhança para esse modelo é:

$$l(\theta; y) = \frac{1}{(\sigma^2 + \lambda^2 \tau^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \phi\left(\frac{y_i - X_i \beta - \lambda Z_i \delta_i}{\sqrt{\sigma^2 + \lambda^2 \tau^2}}\right) \Phi(X) \Phi^{-1}\left(\frac{Z_i \delta}{\tau}\right) \quad (11)$$

onde:

$$X = \frac{\lambda \tau (y_i - X_i \beta - \lambda Z_i \delta)}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + \lambda^2 \tau^2}} + \frac{Z_i \delta \sqrt{\sigma^2 + \lambda^2 \tau^2}}{\sigma \tau}$$

A inferência é feita utilizando o enfoque bayesiano, isto é, propomos uma distribuição *a priori* para o vetor de parâmetros. Essa distribuição *a priori* deve refletir a informação disponível a respeito de θ antes de observarmos o conjunto de dados. Quando o conjunto de dados é observado, a atualização da informação é feita através do Teorema de Bayes.

$$p(\theta | y) = \frac{l(\theta; y)p(\theta)}{p(y)} \propto l(\theta; y)p(\theta) \quad (12)$$

Foram utilizadas prioris vagas e independentes para os parâmetros do modelo:

$$\beta \sim N_{p+1}(b_0, H_0)$$

$$\delta \sim N_{q+1}(b_1, H_1)$$

$$\sigma^2 \sim GI(n_0, a_0)$$

$$\tau^2 \sim GI(n_1, a_1) \quad (13)$$

A distribuição obtida para os parâmetros a partir de (11), (12) e (13) não possui forma analítica fechada, então utilizamos o algoritmo de Metropolis Hastings para obter amostras dos parâmetros e assim uma aproximação para a distribuição de interesse, $p(\theta | y)$. O algoritmo de Metropolis Hastings baseia-se em gerações consecutivas de uma cadeia de Markov cuja distribuição limite é a distribuição de interesse.¹

3.2 PROBLEMAS DA VEROSSIMILHANÇA

A verossimilhança para o modelo utilizado (*closed skew-normal*) tem alguns problemas associados. Um dos parâmetros da *skew-normal*, que no caso do modelo de fronteira é dado por τ/σ pode causar problemas no procedimento de estimação. Isso ocorre pois quando τ tende para 0, τ/σ também tende a 0, resultando no modelo limite normal, e nesse caso a verossimilhança tende para uma constante diferente de 0 quando τ/σ tende para zero. Isso pode ser visto na representação onde erro $e = v - u$ tem distribuição *skew-normal* e quando τ tende a 0 significa que temos apenas a componente v , que tem distribuição normal.² Liseo e Loperfido mostram que há uma probabilidade positiva de o estimador de máxima verossimilhança ser infinito, especialmente para amostras muito pequenas. Para $n = 10$, essa probabilidade chega a aproximadamente 50%. Porém, para $n = 30$ ela cai para 13% para τ/σ igual a 5 (que é um valor bastante extremo). É esperado que para amostras suficientemente grandes essa probabilidade seja aproximadamente 0. Esses autores sugerem a utilização de prioris de referência para solucionar os problemas encontrados na verossimilhança. Neste trabalho, faremos uso de conjuntos de dados relativamente grandes e, por esse motivo, não nos preocuparemos com esse problema.

1. Para maiores detalhes sobre o método, ver Gamerman (1997).

2. Para uma discussão mais detalhada sobre esse tópico, ver Liseo e Loperfido (2004).

3.3 EFICIÊNCIA

O principal interesse na modelagem de fronteira estocástica é a estimação das eficiências u_i para cada firma i . A maneira mais comum de se estimar a eficiência é utilizando $\lambda E[u_i | e_i]$, $i = 1, \dots, n$.

A densidade $u|e$ possui distribuição normal truncada dada por:

$$u | e \sim N^0(m_u, s_u^2)$$

onde:

$$m_u = Z\delta + \lambda\sigma_u^2\sigma^{-2}(y - X\beta - \lambda Z\delta)$$

$$s_u^2 = (\lambda^2\sigma^{-2} + \tau^{-2})^{-1}$$

Dessa forma,

$$E[u | e] = \int_0^{\infty} uf(u | e)du$$

que é uma função dos parâmetros e pode ser calculada diretamente a cada iteração do algoritmo de Metropolis Hastings.

4 IMPLEMENTAÇÃO

O vetor de parâmetros de interesse é dado por $\psi = (\beta, \sigma^2, \delta, \tau^2)$, onde β são os coeficientes dos fatores de produção, σ^2 é a variância do erro de medida, δ são os coeficientes dos determinantes da produtividade e τ^2 é a variância da produtividade.

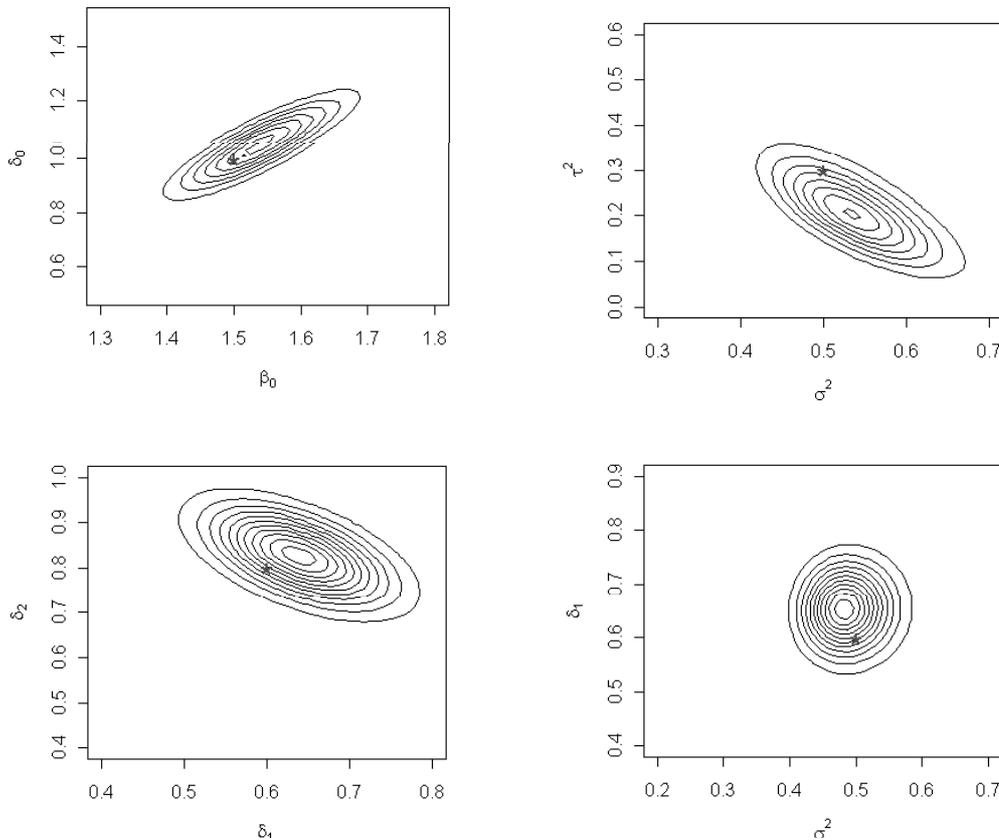
4.1 BLOCOS DE AMOSTRAGEM

A amostragem da distribuição *a posteriori* dos parâmetros é feita em blocos de forma a termos a maior correlação possível das componentes de um mesmo bloco e a menor possível entre componentes de blocos diferentes. A combinação que se mostrou mais adequada, baseando-se em dados gerados artificialmente, foi a seguinte:

$$\begin{array}{ll} \text{Bloco 1: } (\beta_0, \delta_0) & \text{Bloco 2: } (\beta_1, \dots, \beta_p) \\ \text{Bloco 3: } (\delta_1, \dots, \delta_k) & \text{Bloco 4: } (\sigma^2, \tau^2) \end{array} \quad (14)$$

A correlação entre os estimadores dos parâmetros é mostrada nas figuras a seguir, que mostram para pares selecionados de parâmetros as curvas de contorno da função de verossimilhança, onde os parâmetros omitidos estão fixados no seu verdadeiro valor. As figuras mostram que a correlação entre os interceptos (β_0, δ_0) e entre as variâncias (σ^2, τ^2) é maior do que entre os demais parâmetros, justificando a escolha dos blocos de amostragem adotados. As três primeiras figuras mostram que os

parâmetros são muito correlacionados, pois temos elipses, enquanto a última mostra que não há correlação entre os parâmetros, pois nesse caso temos círculos.



4.2 DISTRIBUIÇÕES PROPOSTAS

A distribuição proposta para β_0 foi a Normal com média no passo anterior da cadeia e desvio-padrão d_{01} . Analogamente, a proposta para δ_0 foi a Normal com média no passo anterior da cadeia e desvio-padrão d_{05} .

As distribuições propostas para $(\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ foi a Normal p variada com média no passo anterior da cadeia e matriz de variância S_1^2 dada por:

$$S_1^2 = (X^T X)^{-1} d_1^2$$

Analogamente, as distribuições propostas para $(\delta_1, \dots, \delta_q)^T$ foi a Normal q variada com média no passo anterior da cadeia e matriz de variância S_2^2 dada por:

$$S_2^2 = (Z^T Z)^{-1} d_5^2$$

A distribuição proposta para $\log(\sigma^2)$ foi a Normal com média no passo anterior da cadeia, $\log(\sigma_{k-1}^2)$, e desvio-padrão d_2 . Para $\log(\tau^2)$ utilizou-se a Normal com média no passo anterior da cadeia, $\log(\tau_{k-1}^2)$, e desvio-padrão d_3 . Os valores de d_1, d_2, d_3, d_5 ,

d_{01} e d_{05} devem ser calibrados de forma a obtermos taxas de aceitação entre 30% e 80%.

4.3 VALORES INICIAIS DAS CADEIAS

Os parâmetros β_1, \dots, β_p foram iniciados nos EMVs, isto é, no estimador de mínimos quadrados ordinários (MQO). Os parâmetros τ^2 e σ^2 foram iniciados em $0,5 * s^2$, onde s^2 é a estimativa para a variância total ($e = v - u$). Para $\delta_0, \dots, \delta_q$ utilizou-se $-(Z^T Z)^{-1} Z^T y^*$, onde $y^* = (y - X\beta)$. O valor inicial de β_0 se mostrou muito importante na velocidade de convergência da cadeia; por esse motivo, para iniciar este parâmetro utilizou-se o seguinte procedimento:

Devido aos valores iniciais dos outros parâmetros, maximizou-se a função de verossimilhança perfilada dada por: $l(\beta_0 | \beta_1, \dots, \beta_p, \sigma^2, \delta_0, \dots, \delta_q, \tau^2, y)$. O valor obtido é sempre melhor, pelo menos para dados simulados, que o EMV dado por: $\bar{y} - \bar{x}\hat{\beta}_{-0}$.

4.4 GERAÇÃO DAS EFICIÊNCIAS

Como já visto, a distribuição de u é dada por $u | e \sim N^0(m_u, s_u^2)$, onde $m_u = Z\delta + \lambda\sigma^{-2}(y - X\beta - \lambda Z\delta)$ e $s_u^2 = (\lambda^2\sigma^{-2} + \tau^{-2})^{-1}$. E, conseqüentemente, a quantidade de interesse, $E[u|e]$, será dada por:

$$E[u | e] = \int_0^{\infty} u f(u | e) du \quad (16)$$

5 DADO DE PAINEL

Considere y_t vetores de n observações e X_t matrizes n por p de co-variáveis, para $t = 1, 2, \dots, T$, onde T é o número de períodos de tempo.

O modelo de fronteira de produção para dados em painel pode ser escrito como:

$$y_{it} = \sum_{k=1}^p \beta_k X_{kit} + v_{it} - u_{it}$$

onde $i = 1, 2, \dots, n$ e $t = 1, 2, \dots, T$.

Como no modelo para dados *cross-section*, a componente simétrica do erro tem distribuição normal com média 0 e variância σ^2 .

Lee e Schimidt (1993) propuseram a seguinte abordagem para o termo da produtividade u_{it} :

$$u_{it} = u_i \varphi(t)$$

onde $\varphi(t)$ é uma função do tempo t e $u_i \sim N^0(0, \tau^2)$.

Battese e Coelli (1992) propuseram a utilização da função $\varphi(t) = \exp\{\eta(T - t)\}$, $t = 1, 2, \dots, T$.

Dessa forma, obtemos a seguinte verossimilhança para os parâmetros do modelo $\theta = (\beta, \sigma^2, \eta, \tau^2)$:

$$l(\theta; y) \propto \frac{s^n}{\tau^n \sigma^{7n}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_i \left[\frac{\sum_t (y_{it} - X_{it} \beta)^2}{\sigma^2} - \frac{m_i^2}{s^2} \right] \right\} \prod_{i=1}^n \Phi \left(\frac{m_i}{s} \right)$$

onde:

$$s^2 = \left(\frac{\sum_t \varphi(t)^2}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2} \right)^{-1}$$

e:

$$m_i = -s^2 \sigma^{-2} \sum_t (y_{it} - X_{it} \beta) \varphi(t)$$

A densidade $u|e$ possui distribuição normal truncada³ dada por:

$$u_i | e \sim N^0(m_i, s^2)$$

Novamente temos $E[u|e] = \int_0^{\infty} u f(u|e) du$, que é uma função dos parâmetros e pode ser calculada diretamente a cada iteração do algoritmo de Metropolis Hastings.

6 ESTUDO SIMULADO

Inicialmente, foram gerados conjuntos de dados do modelo proposto para validação do algoritmo de estimação através da comparação com os resultados obtidos por métodos conhecidos na literatura. Os métodos utilizados para estimação foram:

a) Máxima verossimilhança [Battese e Coelli (1992)], em que o algoritmo está disponível através do programa Frontier, versão 4.1, que produz estimativas para os parâmetros do modelo de fronteira de produção e para as eficiências; e

b) DEA, que utiliza um método não-paramétrico para estimar as eficiências. O método está disponível através do programa Deap, versão 2.1.

Para geração utilizaram-se duas co-variáveis e o vetor unitário. O modelo utilizado foi o *translog*. A Tabela 1 traz um resumo das várias configurações utilizadas para comparação. Os resultados são mostrados para alguns conjuntos de dados.

3. Para maiores detalhes, ver Kumbhakar e Lovell (2000).

TABELA 1
VALORES DOS PARÂMETROS UTILIZADOS PARA A GERAÇÃO DOS 9 CONJUNTOS DE DADOS

Dado	Especificação
1	$n = 500; \gamma = 0,9; k = 1; \sigma^2 = 0,5$
2	$N = 500; \gamma = 0,9; k = 0,1; \sigma^2 = 0,5$
3	$n = 500; \gamma = 0,4; k = 1; \sigma^2 = 0,5$
4	$n = 500; \gamma = 0,9; k = 1; \sigma^2 = 0,05$

6.1 VARIANDO k NO MODELO $y = k\beta x + e$

Para os conjuntos de dados 1 e 2 notamos que a EMV para a variância da componente de erro de medida (σ^2) é insatisfatória. Por outro lado, a média *a posteriori* tem um comportamento muito razoável, tendo uma estimativa pontual bastante próxima do valor verdadeiro do parâmetro. No Gráfico 1, observamos que o viés obtido utilizando a estimativa produzida pelo DEA é bem maior do que o viés da média *a posteriori* e do EMV.

GRÁFICO 1
VIÉS PARA A MÉDIA DA PRODUTIVIDADE UTILIZANDO O EMV, O DEA E A MÉDIA A POSTERIORI PARA O CONJUNTO DE DADOS 1

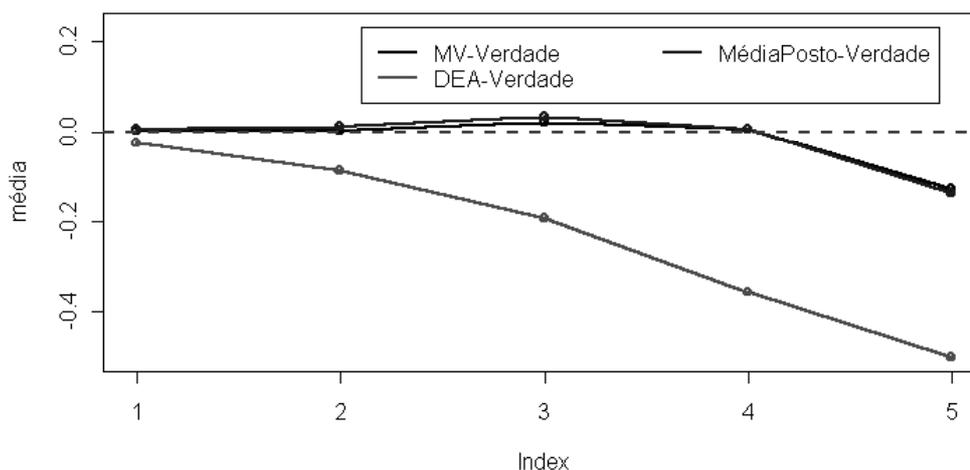


TABELA 2
SUMÁRIO DA INFERÊNCIA PARA O CONJUNTO DE DADOS 1

	MV	Média <i>posteriori</i>	Intervalo de 95%
$\beta_0 = 1,50$	1,67 (0,11)	1,63 (0,12)	(1,40; 1,85)
$\beta_1 = 0,60$	0,59 (0,08)	0,60 (0,08)	(0,44; 0,77)
$\beta_2 = 0,80$	0,80 (0,08)	0,80 (0,08)	(0,63; 0,95)
$\beta_3 = -0,10$	-0,12 (0,06)	-0,11 (0,06)	(-0,23; 0,02)
$\beta_4 = -0,20$	-0,23 (0,06)	-0,23 (0,06)	(-0,34; -0,10)
$\beta_5 = 0,10$	0,12 (0,11)	0,10 (0,12)	(-0,13; 0,32)
$\sigma^2 = 0,50$	5,67 (0,50)	0,45 (0,13)	(0,26; 0,73)
$\gamma = 0,90$	0,93 (0,02)	0,92 (0,03)	(0,85; 0,96)

TABELA 3
SUMÁRIO DA INFERÊNCIA PARA O CONJUNTO DE DADOS 2

	MV	Média <i>posteriori</i>	Intervalo de 95%
$\beta_0 = 1,50$	0,10 (0,12)	0,07 (0,13)	(-0,20; 0,30)
$\beta_1 = 0,60$	0,09 (0,08)	0,09 (0,08)	(-0,09; 0,25)
$\beta_2 = 0,80$	0,07 (0,08)	0,07 (0,08)	(-0,09; 0,23)
$\beta_3 = -0,10$	-0,01 (0,07)	-0,01 (0,07)	(-0,14; 0,13)
$\beta_4 = -0,20$	-0,03 (0,07)	-0,01 (0,07)	(0,15; 0,14)
$\beta_5 = 0,10$	0,06 (0,12)	0,06 (0,12)	(-0,20; 0,29)
$\sigma^2 = 0,50$	5,17 (0,49)	0,65 (0,13)	(0,43; 0,95)
$\gamma = 0,90$	0,89 (0,03)	0,87 (0,03)	(0,85; 0,95)

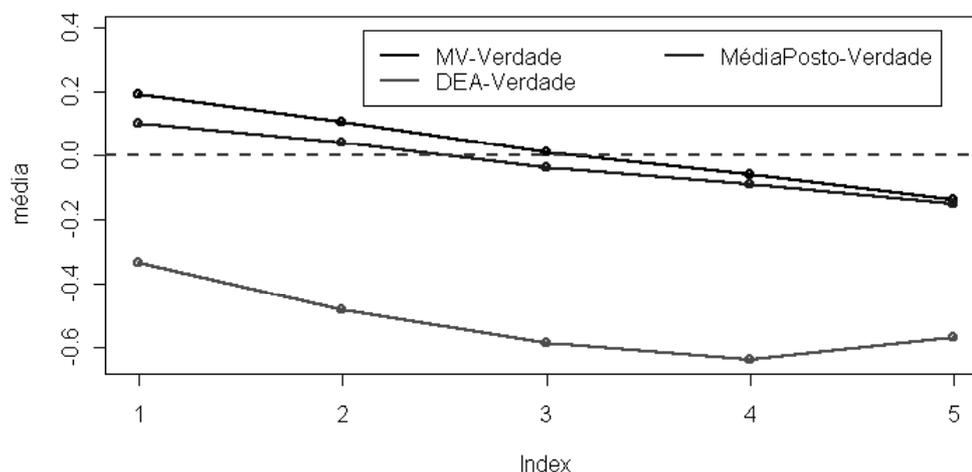
6.2 VARIANDO γ

Para o conjunto de dados 3 notamos que a incerteza na EMV para β_0 e γ é bem maior do que a obtida utilizando a média *a posteriori*. No Gráfico 2, observamos que o viés obtido utilizando a estimativa produzida pelo DEA é bem maior que o viés da média *a posteriori* e do EMV.

TABELA 4
SUMÁRIO DA INFERÊNCIA PARA O CONJUNTO DE DADOS 3

	MV	Média <i>posteriori</i>	Intervalo de 95%
$\beta_0 = 1,50$	1,41 (0,21)	1,52 (0,10)	(1,31; 1,71)
$\beta_1 = 0,60$	0,59 (0,04)	0,59 (0,04)	(0,51; 0,67)
$\beta_2 = 0,80$	0,83 (0,05)	0,83 (0,05)	(0,74; 0,93)
$\beta_3 = -0,10$	-0,10 (0,04)	-0,10 (0,04)	(-0,17; -0,03)
$\beta_4 = -0,20$	-0,16 (0,04)	-0,16 (0,04)	(-0,23; -0,07)
$\beta_5 = 0,10$	0,04 (0,07)	0,04 (0,07)	(-0,10; 0,17)
$\sigma^2 = 0,50$	0,75 (0,18)	0,65 (0,13)	(0,29; 0,53)
$\gamma = 0,40$	0,39 (0,28)	0,41 (0,06)	(0,27; 0,72)

GRÁFICO 2
VIÉS PARA A MÉDIA DA PRODUTIVIDADE UTILIZANDO O EMV, O DEA E A MÉDIA *A POSTERIORI* PARA O CONJUNTO DE DADOS 3



6.3 VARIANDO σ^2 PARA γ FIXO

Para o conjunto de dados 4 notamos que a EMV para a variância da componente de erro de medida (σ^2) é insatisfatória. Por outro lado, a média *a posteriori* tem um comportamento muito razoável, tendo uma estimativa pontual bastante próxima do valor verdadeiro do parâmetro. No Gráfico 3, observamos que o viés obtido utilizando a estimativa produzida pelo DEA é bem maior do que o viés da média *a posteriori* e do EMV.

GRÁFICO 3
VIÉS PARA A MÉDIA DA PRODUTIVIDADE UTILIZANDO O EMV, O DEA E A MÉDIA A POSTERIORI PARA O CONJUNTO DE DADOS 4

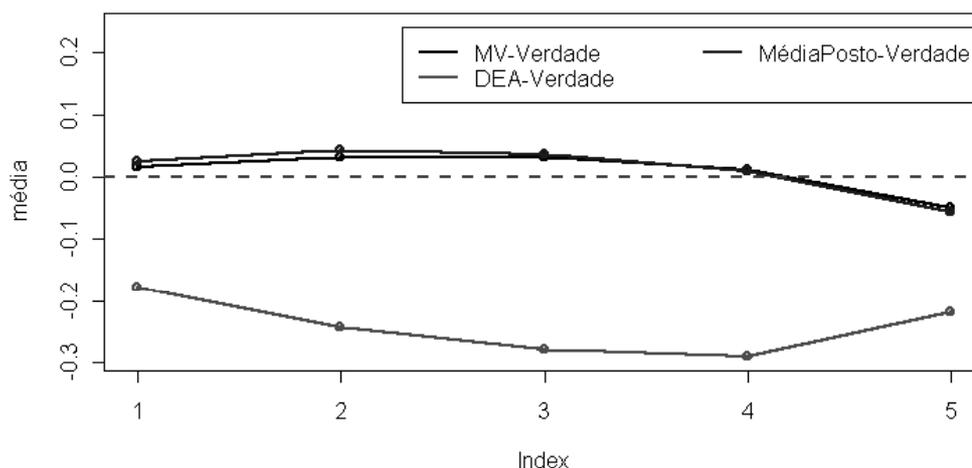


TABELA 5
SUMÁRIO DA INFERÊNCIA PARA O CONJUNTO DE DADOS 4

	MV	Média <i>posteriori</i>	Intervalo de 95%
$\beta_0 = 1,50$	1,48 (0,04)	1,47 (0,04)	(1,40;1,54)
$\beta_1 = 0,60$	0,54 (0,02)	0,54 (0,02)	(0,50;0,60)
$\beta_2 = 0,80$	0,84 (0,03)	0,83 (0,03)	(0,78;0,88)
$\beta_3 = -0,10$	-0,10 (0,02)	-0,10 (0,02)	(-0,15;-0,06)
$\beta_4 = -0,20$	-0,18 (0,02)	-0,18 (0,02)	(-0,22;-0,13)
$\beta_5 = 0,10$	0,08 (0,04)	0,08 (0,04)	(0,00;0,15)
$\sigma^2 = 0,05$	0,50 (0,05)	0,05 (0,01)	(0,03;0,08)
$\gamma = 0,40$	0,91 (0,02)	0,90 (0,03)	(0,83;0,94)

APÊNDICE

CÁLCULO DE $E[u|E]$

Daí podemos obter condicionalmente a e que $\tilde{u} = \frac{u - m_u}{s_u} \sim N^c(0,1)$, onde $c = -\frac{m_u}{s_u}$. E, portanto, $E[u|e] = m_u + s_u E[\tilde{u}|e]$, onde $E[\tilde{u}|e] = \int_c^\infty w\phi(w)dw$ e ϕ é a densidade Normal-padrão. Definimos $I_c = \int_c^\infty w\phi(w)dw$ e para m valores de c em $[-4,4]$ calculamos essa

integral. Temos um vetor com componentes I_j para $j = 1, \dots, m$ e para cada c_j um j correspondente obtido pela relação $c_j = -4 + \frac{8}{m}j$, isto é, $j = (4 + c_j) \frac{m}{8}$.

Calcularam-se valores de I_c para $m = 50.000$ uma única vez, não sendo necessário calcular essa esperança dentro do algoritmo de Metropolis, apenas acessamos esses valores que estão guardados em uma tabela, pois para um dado valor de $c_j = -\frac{m_u}{s_u}$, obtemos j , que na tabela I_j guarda o resultado da integral. Como esse é um passo independente da convergência da cadeia (estamos apenas calculando uma função dos parâmetros gerados), ele só é introduzido quando a convergência já foi alcançada. Como resultado temos uma aproximação para a distribuição de $E[u|e]$ e a distribuição de $u|e$. Podemos então obter intervalos para a média de u e também para u .

BIBLIOGRAFIA

- AIGNER, D., LOVELL, K. A. K., SCHMIDT, P. Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. *Journal of Econometrics*, v. 6, p. 21-37, 1977.
- AZZALINI, A. A class of distribution which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics*, v. 12, p. 171-178, 1985.
- BATTESE, G. E., COELLI, T. J. Frontier production functions, technical efficiency and panel data: with application to Paddy Farmers in India. *Journal of Productivity Analysis*, v. 3, p. 153-169, 1992.
- _____. A model for technical inefficiency effects in a stochastic frontier production function for panel data. *Empirical Economics*, v. 20, p. 325-332, 1995.
- BATTESE, G. E., CORRA, G. Estimation of a production frontier model, with application to the pastoral zone of Eastern Australia. *Australian Journal of Agricultural Economics*, v. 21, p. 169-179, 1977.
- COELLI, T. J. *A guide to Frontier version 4.1: a computer program for stochastic frontier production and cost function estimation*. 1996a (Working Paper).
- _____. *A guide to Deap version 2.1: a data envelopment analysis (computer) program*. 1996b (Working Paper).
- FARRELL, M. J. The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society*, (A, geral) 120, pt. 3, p. 253-281, 1957.
- GAMERMAN, D. *Markov Chain Monte Carlo*. Chapman-Hall, 1997.
- GREENE, W. A gamma distributed stochastic frontier model. *Journal of Econometrics*, v. 46, p. 141-164, 1990.
- KUMBHAKAR, S. C., LOVELL, C. A. K. *Stochastic frontier analysis*. Cambridge University Press, 2000.
- LEE, Y., SCHMIDT, P. A production frontier model with flexible temporal variation in technical inefficiency. In: FRIED, H., LOVELL, K. (eds.). *The*

- measurement of productive efficiency: techniques and applications*. Oxford University Press, New York, 1993.
- LISEO, B., LOPERFIDO, N. Default Bayesian analysis of the skew-normal distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2004 (to appear).
- MEDRANO, L. A. T. *Análise bayesiana de modelos de fronteira de produção estocástica*. UFRJ, 2003 (Tese de Mestrado).
- MEEUSEN, W., VAN den BROECK, J. Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed error. *International Economic Review*, v. 18, p. 435-444, 1977.
- RITTER, C., SIMAR, L. Pitfalls of Normal-gamma stochastic frontier models. *Journal of Productivity Analysis*, v. 8, p. 167-182, 1997.
- SCHMIDT, P., LIN, T. F. Simple test of alternative specifications in stochastic frontier models. *Journal of Econometrics*, v. 24, n. 3, p. 349-361, Mar. 1984.
- STEVENSON, R. Likelihood functions for generalized stochastic frontier estimation. *Journal of Econometrics*, v. 13, p. 57-66, 1980.
- VAN den BROECK, J. *et alii*. Stochastic frontier models. A Bayesian perspective. *Journal of Econometrics*, v. 61, p. 273-303, 1994.

EDITORIAL

Coordenação

Silvania de Araujo Carvalho

Supervisão

Helena Rodarte Costa Valente

Revisão

André Pinheiro

Elisabete de Carvalho Soares

Lucia Duarte Moreira

Marcio Alves de Albuquerque

Míriam Nunes da Fonseca

Alejandro Augusto S. V. A. Poinho (estagiário)

Editoração

Carlos Henrique Santos Vianna

Joanna Silvestre Friques de Sousa

Roberto das Chagas Campos

COMITÊ EDITORIAL

Secretário-Executivo

Marco Aurélio Dias Pires

SBS – Quadra 1 – Bloco J – Ed. BNDES,

9^º andar – 70076-900 – Brasília – DF

Fone: (61) 315-5336

Fax: (61) 315-5314

Correio eletrônico: madp@ipea.gov.br

Brasília

SBS – Quadra 1 – Bloco J – Ed. BNDES,

9^º andar – 70076-900 – Brasília – DF

Fone: (61) 315-5336

Fax: (61) 315-5314

Correio eletrônico: editbsb@ipea.gov.br

Rio de Janeiro

Av. Presidente Antônio Carlos, 51, 14^º andar

20020-010 – Rio de Janeiro – RJ

Fone: (21) 3804-8118

Fax: (21) 2220-5533

Correio eletrônico: editrj@ipea.gov.br

Tiragem: 145 exemplares